Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις: Θέματα και Υποδείξεις

Δευτέρα 8-6-2015, 9-12 μ.

1. (i) Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = y\sqrt{x}$ να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = f(x), \quad x > 0,$$

όπου $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν συναρτήσεις f τέτοιες ώστε όλες οι λύσεις της εξίσωσης να είναι φραγμένες στο $[2015, +\infty)$.

2. Θεωρούμε τη εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0.$$

(i) Αν $p = m \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ υπάρχει μια πολυωνυμική λύση $T_m(x)$ της εξίσωσης και να υπολογιστούν τα πολυώνυμα για $m = 1, 2, 3$.
(ii) Να υπολογιστεί το $\int_{-c}^{c} T_m(x)T_{m+1}(x)dx$ για $c > 0$.

3. Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y'(x) + 2y(x) = q(x), x \in \mathbb{R},$$

όπου $q(x) = 1 - |x|, \quad |x| \leq 1$ και $q(x) = 0, \quad |x| > 1$.
(i) Να λυθεί η εξίσωση και να εξετασθεί αν υπάρχει λύση ¨τελικά σταθερή στο $+\infty$¨.
(ii) Αν $y(0) > 0$, να εξετάσετε αν υπάρχουν λύσεις: α) φραγμένες στο $(0, \infty)$ β) φραγμένες στο $\mathbb{R}$.

4. (i) Να δοθούν οι ορισμοί των εννοιών α) βασικού συνόλου λύσεων (β.συν.λ.) β) ορίζουσας Wronski.
(ii) Αν $A = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ είναι ένα β.συν.λ. μιας ομογενούς γ.δ.ε. και $z_k = c_1y_1 + ... + c_ky_k, c_k \neq 0, k = 1, ...n$, να εξετασθεί αν το σύνολο $B = \{z_1, ..., z_n\}$ είναι β.συν.λ. της ίδιας εξίσωσης. Να διατυπωθεί η Πρόταση που χρησιμοποιήθηκε.
(iii) Να βρεθεί - αν υπάρχει - μια ομογενής γ.δ.ε. με βασικό σύνολο λύσεων το σύνολο

$$S = \{y_k = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (k+1)x^k, k = 0, 1, ..., 2015\}.$$

5. Να λυθούν δυο από τις εξισώσεις-π.α.τ.:
(i) $\frac{y'}{y^2+1} + \frac{2}{x}Arctgy = \frac{2}{x}$ (ii) $y^2 + 4ye^x + 2(y + e^x)y' = 0, \quad y(0) = 1$
(iii) $2z_x + 3z_y + z = e^{-x}, \quad z(0, y) = siny.$